4.3 Sajátos paralelogrammák: téglalap, rombusz, négyzet

L1 A téglalap. Tulajdonságok, 110. oldal

2. Adott az $ABCD$ négyszög, melyben $A\sphericalangle = B\sphericalangle = C\sphericalangle = 90°$. Ekkor $DA \perp AB$, $AB \perp BC$, $BC \perp CD$. Mivel $DA \perp AB$, $CB \perp AB \Rightarrow AD \parallel BC$. Mivel $AB \perp BC$, $DC \perp BC \Rightarrow AB \parallel CD$. A négyszögnek szemben fekvő oldalai párhuzamosak és szöge 90°, tehát téglalap.

3. Az $ABCD$ négyszögben, $A\sphericalangle = \dfrac{B\sphericalangle + C\sphericalangle + D\sphericalangle}{3}$ tehát $3 \cdot A\sphericalangle = B\sphericalangle + C\sphericalangle + D\sphericalangle$.

De $A\sphericalangle + B\sphericalangle + C\sphericalangle + D\sphericalangle = 360°$. Az utolsó két egyenlőtlenség alapján $4 \cdot A\sphericalangle = 360°$, ahonnan $A\sphericalangle = 90°$. Hasonlóan $B\sphericalangle = C\sphericalangle = 90°$.
A 2. feladat eredményét felhasználva következik, hogy $ABCD$ egy téglalap.

4. $K_{BOC_\Delta} = 37{,}2$ cm. **5. a)** $MQN\sphericalangle = 54°$; $MPQ\sphericalangle = 36°$; **b)** $MOQ\sphericalangle = 128°$; $MPN\sphericalangle = 26°$.

6. a) $MON\sphericalangle = BOM\sphericalangle + BOE\sphericalangle = \dfrac{AOB\sphericalangle}{2} + \dfrac{BOC\sphericalangle}{2} = 90°$. $BD \perp DO$, $BE \perp EO \Rightarrow$

$BDO\sphericalangle = BEO\sphericalangle = 90°$ és $BDOE$-nek három derékszöge van;

b) OB, DE átlóik a téglalapban $\Rightarrow OB \equiv DE$.

7. $ADBE$ téglalap, mert az átlók felezik egymást és $ADB\sphericalangle = 90°$.
Hasonlóan $ADCF$ téglalap $\Rightarrow BCFE$ is téglalap.

8. a) $BF = CN = 5$ cm, $BF \parallel CN$ és $FBC\sphericalangle = 90°$;

b) DAF_Δ és MBF_Δ derékszögű egyenlő szárúak és $AFD\sphericalangle = BFM\sphericalangle = 45°$.

$DFM\sphericalangle = AFB\sphericalangle - AFD\sphericalangle - BFM\sphericalangle = 90°$;

c) Legyen $PQ \perp CD$, $Q \in CD$. $MCN_\Delta \equiv PQN_\Delta$ (O.Sz.)$\Rightarrow PQ = QN = NC = DQ = 5$ cm, tehát $DPM\sphericalangle = 90°$. A $DFMP$ négyszögnek három derékszöge van, vagyis egy téglalap.

9. a) $MON\sphericalangle = 60°$; **b)** $MN = 10$ cm.

10. $ACBE$ paralelogramma (az átlók felezik egymást) $\Rightarrow AE \parallel BC$, $AE = BC \Rightarrow AE \parallel BD$, $AE = BD \Rightarrow ABDE$ paralelogramma. Továbbá $ABD\sphericalangle = 90°$.

11. $AB = BC = CD = DE = x$, $MC = CN = y$, $AE = 2 \cdot MN \Rightarrow 4x = 2 \cdot 2y \Rightarrow x = y$.
Az $AMEN$-ben és $BMDN$-ben az átlók felezik egymást. Továbbá $MN = BD = 2 \cdot x$.

12. $AEDF$ paralelogramma, mert a szemközti oldalak párhuzamosak. I *eset*. Ha $AEDF$ téglalap, akkor $FAE\sphericalangle = BAC\sphericalangle = 90°$. II. *eset* Ha $BAC\sphericalangle$ - $90°$, akkor $FAE\sphericalangle = 90°$ és $AEDF$ téglalap.

13. Legyen P és Q az OA és OB sugarak felezőpontja $\Rightarrow AP = PO = OQ = QB$. A D és F pontokat választunk az AB egyenes ugyanazon oldalán. Ekkor $COP_\Delta \equiv DOP_\Delta \equiv EOQ_\Delta \equiv FOQ_\Delta$ (Á.B.). Következtetjük, hogy a C, O, F pontok és a D, O, E pontok kollineárisak $\Rightarrow$ a DE és CF átlók egybevágók és felezik egymást, így a $CDFE$ téglalap.

14. $ADP\sphericalangle = x$, $APD\sphericalangle = 5x$. ADP_Δ-ben: $90° + 6x = 180° \Rightarrow x = 15° \Rightarrow CDP\sphericalangle = 75°$.

$CP = AB = CD \Rightarrow CDP_\Delta$ egyenlő szárú $\Rightarrow DPC\sphericalangle = 75°$, $DCP\sphericalangle = 30°$.

15. **a)** $QMR_\Delta \equiv SNR_\Delta$ (B.Sz.) $\Rightarrow R$ az MN és QS szakaszok felezőpontja.

$TMR_\Delta \equiv PNR_\Delta$ (B.Sz.) $\Rightarrow TM = PN = NS$. $TM \parallel NS$, $TMN\sphericalangle = 90°$, Tehát $MNST$ téglalap.

b) Legyen $\{O\} = MP \cap QN$. A az MNP_Δ súlypontja.

$$AT = TR + RA = PR + RA = \frac{3}{2}\cdot AP + \frac{1}{2}\cdot AP = 2\cdot AP.$$