L3 A négyzet. Tulajdonságok, 117. oldal

3. Feltevés szerint, $AB \equiv AC$ és $DB \equiv DC$. $ABC_\Delta \equiv DCB_\Delta$ (Á.Sz.) $\Rightarrow AB \equiv DC$.

Kapjuk: $AB \equiv BD \equiv DC \equiv CA$ és $A\sphericalangle = 90°$, tehát $ABDC$ négyzet.

4. Legyenek M, N, P, Q az $ABCD$ négyzet AB, BC, CD, illetve DA oldalainak felezőpontjai. A középvonal tulajdonságait használva $MN = PQ = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{BD}{2} = NP = MP$, $MN \parallel AC$, $MQ \parallel BD$, $AC \perp BD$ $\Rightarrow MN \perp MQ$ és $MNPQ$ négyzet.

5. Legyenek M, N, P, Q az AO, BO, CO, illetve DO szakaszok felezőpontjai. Ekkor, $MO = OP$, $NO = OQ$, $MP = MO + OP = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{BD}{2} = NO + OQ = NQ$ és $MP \perp NQ$.

6. $A\sphericalangle = C\sphericalangle$, $A\sphericalangle + C\sphericalangle = 180° \Rightarrow A\sphericalangle = C\sphericalangle = 90°$. A rombusznak van egy derékszöge, tehát négyzet.

7. Legyen $\{O\} = AC \cap BD$. $DOP_\Delta \equiv BOP_\Delta$ (O.O.O.) $\Rightarrow \sphericalangle DOP = \sphericalangle BOP$.

De, $DOP\sphericalangle + BOP\sphericalangle = 180° \Rightarrow DOP\sphericalangle = 90°$. A merőleges átlójú téglalap négyzet.

8. Ha $l = (L + L + l): 3 \Rightarrow l = L$; Ha $L = (L + l + l): 3 \Rightarrow L = l$.

9. a) $EAF\sphericalangle = 45°$, $AFE\sphericalangle = AEF\sphericalangle = 67°\,30'$. **b)** Jelöljük $\{Q\} = AC \cap EF$. AQ szögfelező és magasság az egyenlő szárú AEF_Δ-ben $\Rightarrow AQ \perp FE$. De $AQ \perp DB \Rightarrow EF \parallel BD$.

10. a) $AEB_\Delta \equiv DFC_\Delta$ (O.Sz.) $\Rightarrow EA = EB = FC = FD = x$. $AMD_\Delta \equiv BNC_\Delta$ (O.Sz.) $\Rightarrow$

$MA = MD = NB = NC = y$. Az $MENF$ négyszög oldalai $x + y$ hosszúak és $MEN\sphericalangle = 90°$.

b) Bebizonyítottuk, hogy $AEB_\Delta \equiv DFC_\Delta$. Akkor, $AFE\sphericalangle = AEF\sphericalangle$ és $AB \parallel CD$, tehát $AE \parallel FC$ és $AE \equiv FC$, vagyis $AECF$ paralelogramma. Következik, hogy AC és EF felezik egymást.

Hasonlóan, $MA \parallel NC$, $MA \equiv NC$, tehát $MANC$ paralelogramma. Következik, hogy AC és MN felezik egymást.

Következésképp, AC, MN és EF azonos a középpontjuk, és tartóegyeneseik összefutók.

11. a) $GAB_\Delta \equiv CAE_\Delta$ (B.B.) $\Rightarrow BG = CE$. **b)** Mivel $BG \parallel CE \Rightarrow BECG$ paralelogramma és A a BC szakasz felezőpontja. $\dfrac{AB}{AC} = 1$.

12. a) $BAF\sphericalangle = 45°$, $BAC\sphericalangle = 45°$, és az F és C pont az AB egyenes ugyanazon az oldalán vannak $\Rightarrow$ A, F, C kollineárisak;

b) $AEG\sphericalangle = ABD\sphericalangle = 45°$ és megfelelő szögek, amelyeket a DB és GE egyenesek alkotnak az AB szelővel.

13. a) $ABE\sphericalangle = CAF\sphericalangle = 45°$ és megfelelő szögek, amelyeket a BE és AF egyenesek alkotnak a BC szelővel; $BE \parallel AF$ és $AF \perp CE \Rightarrow BE \perp CE$;

b) Mivel $BE \perp GC \perp DG$, Következik, hogy $BE \parallel GD$.

De, $BD \parallel GE$, tehát $BEGD$ paralelogramma. $GE = DB = EA$. Ekkor, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{GE}{GA} = \dfrac{1}{2}$.

14. Az MBQ_{Δ}-ben MC szögfelező és magasság $\Rightarrow$ MBQ_{Δ} egyenlő szárú, $MB = MQ$.
Hasonlóanlog $MQ = QA$. Tehát $MBAQ$ rombusz. Mivel $AC = BC \Rightarrow AM = BQ$, tehát $MBAQ$ négyzet. Következik, hogy $\sphericalangle M = 90°$ és $\dfrac{MN}{NP} = 2$.

15. **b)** $DEF\sphericalangle = 60° + 45° = 105°$.

c) ADE_{Δ} egyenlő szárú, $ADE\sphericalangle = 30°$, $DAE\sphericalangle = DEA\sphericalangle = 75° \Rightarrow AEF\sphericalangle = 180°$.

e) $ACE\sphericalangle = DCE\sphericalangle - ACD\sphericalangle = 15°$, $BCR\sphericalangle = ACR\sphericalangle - ACB\sphericalangle = 15°$,
$ECR\sphericalangle = ECB\sphericalangle + BCR\sphericalangle = 45°$. A CEF_{Δ}-ben $FCE\sphericalangle = FCB\sphericalangle + ECB\sphericalangle = 90°$, $CE = CF = x$ és $EF = x\sqrt{2}$. A CER_{Δ}-ben $ECR\sphericalangle = 45°$, $CE = x$ és $CR = AC = x\sqrt{2}$. $CR = AC = x\sqrt{2}$.
Tehát $CEF_{\Delta} \equiv ECR_{\Delta}$ (O.Sz.O) $\Rightarrow ER = x$ és $CER\sphericalangle = 90°$. Ilyen körülmények között a $CERF$ egy paralelogramma, amelynek két egymást melletti egybevágó oldala van, és egyik szöge $90°$.