L1 Irracionális számok (24. oldal)

1. a) $\sqrt{4} = 2$ és $\sqrt{\frac{8}{18}} = \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$ racionális számok, mert $\frac{a}{b}$ formában írhatók,

ahol $a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*$.

b) $\sqrt{3}$, $2\sqrt{7}$, $9+\sqrt{12}$, $4-\pi$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$ irracionális számok, mert nem írhatók $\frac{a}{b}$ formában,

ahol $a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z}^*$.

2. a) A tizedes törtek végtelen számú, periodikusan nem ismétlődő tizedesjegyet tartalmaznak.

b) A 0,135791113..... szám tizedesjegyei az egymást követő páratlan természetes számok növekvő sorrendben. A 0,1223334444..... . szám tizedesjegyei a nullától eltérő természetes számok, növekvő sorrendben írva, minden n számot pontosan n-szer írunk le.

3. A $\sqrt{a}$ szám irracionális, ha a nem egy racionális szám négyzete, tehát $\sqrt{a} \in \left\{\sqrt{2^5}, \sqrt{7^3}, \sqrt{8^{11}}\right\}$.

4. Ha az n természetes szám nem teljes négyzet, akkor $\sqrt{n} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

$2^2 < 8 < 3^2$, $8^2 < 76 < 9^2$, $13^2 < 193 < 14^2$, $23^2 < 555 < 24^2$, $31^2 < 1000 < 32^2$.

Ebből következik, hogy a 8, 76, 193, 555, 1000 számok nem teljes négyzetek.

5. a) $x \in \{1, 8, 92\}$ és a keresett számok $\sqrt{1+8} = 3$, $\sqrt{8+8} = 4$, $\sqrt{92+8} = 10$;

b) $y \in \{0, 2, 3\}$ és a számok $\sqrt{5-0} = \sqrt{5}$, $\sqrt{5-2} = \sqrt{3}$, $\sqrt{5-3} = \sqrt{2}$.

6. a) $\sqrt{7{,}31} = \frac{\sqrt{731}}{10} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ mert 731 nem teljes négyzet.

b) $\sqrt{10{,}4992} = \frac{\sqrt{6562}}{25} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ mert 6562 nem teljes négyzet.

7. a) $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ és $a \in \{3, 13, 23, 33, 43\}$;

b) Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén a $10 \cdot n + 3$ alakú számok utolsó számjegye 3 és nem teljes négyzetek.

Következik, hogy $\sqrt{a} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

8. **a)** 100, 121, 144, 169, 196;

b) $\sqrt{100}$, $\sqrt{121}$, $\sqrt{144}$, $\sqrt{169}$, $\sqrt{196}$.

9. **a)** 0, 6, 10, 14, 18;

b) Bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén a $4 \cdot n + 2 = 2 \cdot (2 \cdot n + 1)$ alakú számok oszthatók 2-vel és nem oszthatók $2^2 = 4$-gyel, tehát bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $\sqrt{b} \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

10. **a)** $\sqrt{\overline{67ab}} \in \mathbb{Q}$, tehát létezik $k \in \mathbb{N}$ úgy, hogy $\overline{67ab} = k^2$.

$81^2 = 6561 < \overline{67ab} < 6889 = 83^2$. $82^2 = 6724$. $\overline{ab} = 24$ és $\sqrt{\overline{67ab}} = 82 \in \mathbb{Q}$;

b) $\overline{7cd6} = n^2$ úgy, hogy $u(n) \in \{4, 6\}$. Kapjuk, hogy $84^2 = 7056$, $c = 0$, $d = 5$ és $86^2 = 7396$, $c = 3$, $d = 9$.

$\sqrt{\overline{7cd6}} = \sqrt{7056} = 84$ vagy $\sqrt{\overline{7cd6}} = \sqrt{7396} = 86$.