L2 Condiții suficiente pentru ca un patrulater să fie paralelogram

Minitest 1.C; 2.D; 3.B.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

1. $AB \equiv DC$, $AC \equiv BD$.

2. **a)** $AD \parallel BE$, DE secantă $\Rightarrow \sphericalangle DAM \equiv \sphericalangle EBM$ (alt. int.); $\Delta ADM \equiv \Delta BEM$ (U.L.U.);

b) Din a) $DM \equiv EM$ și din ipoteză $AM \equiv BM$ (diagonalele se înjumătățesc).

3. **a)** $AB \parallel CD$, AE secantă $\Rightarrow \sphericalangle DEA \equiv \sphericalangle BAE$ (alt. int.) și $\sphericalangle BAE \equiv \sphericalangle DAE$.

Rezultă $\sphericalangle DEA \equiv \sphericalangle DAE$, adică ΔADE este isoscel cu $AD = DE$. **b)** ΔBCF este isoscel cu $BC = BF$. Atunci, $AF = AB - BF = CD - DE = CE$. Din $AF \parallel CE \Rightarrow AECF$ paralelogram.

4. $QF = \dfrac{QP}{2} = \dfrac{MN}{2} = ME$ și $QF \parallel ME \Rightarrow MEFQ$ paralelogram $\Rightarrow EF = MQ$ și $EF \parallel MQ$.

Dar, $MQ \parallel NP$ și EF, NP drepte distincte $\Rightarrow EF \parallel NP$.

5. **a)** $AB \parallel CD$, AC secantă $\Rightarrow \sphericalangle BAO = \sphericalangle ACD$ (alt. int.); $\sphericalangle EOA = \sphericalangle FOC$ (op. vf.) și $AO = OC$ (diagonalele paralelogramului se înjumătățesc). Rezultă $\Delta AOE \equiv \Delta COF$ (U.L.U.) $\Rightarrow$

$EO \equiv OF$. **b)** $\Delta BOP \equiv \Delta DOQ$ (U.L.U.) $\Rightarrow BP = DQ$. Cum $BP \parallel DQ \Rightarrow BPDQ$ paralelogram.

$AC \cap PQ = \{O\}$, $AO = CO$ și $PO = QO \Rightarrow APCQ$ paralelogram.

6. **a)** $AMBP$ și $ANCP$ paralelograme (diagonalele se înjumătățesc) $\Rightarrow AM \parallel BC$, $AN \parallel BC \Rightarrow$

M, A, N coliniare; **b)** $MN = MA + AN = BP + PC = BC$ și $MN \parallel BC$.

7. **a)** $\Delta MNR \equiv \Delta PQS$ (I.U.) $\Rightarrow NR \equiv QS$. Atunci, $PR = NP - NR = MQ - QS = MS$.

Din $PR \parallel MS \Rightarrow MRPS$ paralelogram. Din $NR \equiv QS$ și $NR \parallel QS \Rightarrow NRQS$ paralelogram;

b) $MRPS$ paralelogram $\Rightarrow MP$ conține mijlocul diagonalei SR; $NRQS$ paralelogram $\Rightarrow$

NQ conține mijlocul diagonalei SR; MP, NQ, RS au același mijloc, deci sunt concurente.

8. **a)** AD bisectoarea unghiului $BAC \Rightarrow \sphericalangle PAD \equiv \sphericalangle QAD$. DP, DQ mediane $\Rightarrow$

$AP = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{AC}{2} = AQ$. $\Delta APD \equiv \Delta AQD$ (L.U.L.) $\Rightarrow \sphericalangle APD \equiv \sphericalangle AQD$;

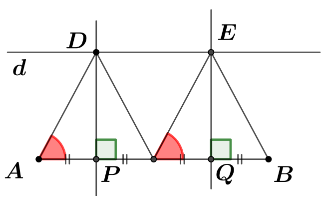
b) AD este bisectoarea unghiului format de laturile congruente $\Rightarrow AD$ este mediană deci

$CD = \frac{BC}{2}$. PQ linie mijlocie $\Rightarrow PQ = \frac{BC}{2}$. Dar, $PQ \parallel CD \Rightarrow CDPQ$ paralelogram;

c) PQ linie mijlocie în triunghiul $ABC \Rightarrow PE$ linie mijlocie în triunghiul ABD și $\frac{ED}{AD} = \frac{1}{2}$.

9. D este mijlocul diagonalelor BC și MN, deci B, C, M și N sunt vârfurile unui paralelogram.

10. Fie P și Q mijloacele segmentelor AC și BC, iar DP și EQ mediatoarele lor. Punctul D aparține mediatoarei segmentului $AC \Rightarrow DA = DC$ și din $DC = EC$, obținem $DA = EC$ (1).



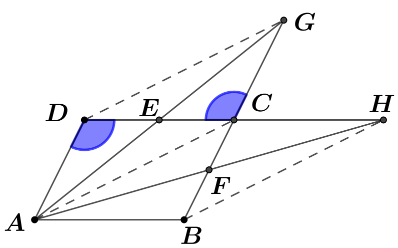
Deoarece $AC = CB \Rightarrow AP = PC = CQ = QB$.

$\Delta DPA \equiv \Delta EQC$ (I.C.) $\Rightarrow \sphericalangle DAP = \sphericalangle ECQ$.

Pentru dreptele DA și EC, cu secanta AB, unghiurile $\sphericalangle DAP$ și $\sphericalangle ECQ$ sunt corespondente, deci $DA \parallel EC$. (2)

Din (1) și (2), rezultă că $ADEC$ este paralelogram.

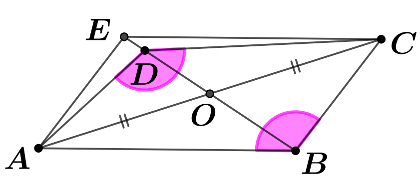
11. $\sphericalangle ADE = \sphericalangle GCE$ (alt. int.), $DE = EC$,$\sphericalangle DEA = \sphericalangle CEG$ (op. vf.) $\Rightarrow \Delta DAE \equiv \Delta CGE \Rightarrow AE = EG$. Deci diagonalele se înjumătățesc $\Rightarrow ACGD$ este paralelogram și $AC \parallel DG$ și $AC = DG$. (1)



Analog se arată că $ACHB$ este paralelogram $\Rightarrow$ $AC \parallel BH$ și $AC = BH$ (2).

Din (1) și (2), rezultă $DG \parallel BH$, $DG = BH$, deci $DBHG$ este paralelogram.

12. Construim $AE \parallel BC$, $E \in BD$.



Cazul 1. Dacă $E = D$, atunci $\Delta EOA \equiv \Delta BOC$ (U.L.U.) $\Rightarrow AE = BC$. Folosind și $AE \parallel BC \Rightarrow$ $ABCE$ paralelogram, deci $ABCD$ paralelogram.

Cazul 2. Dacă $E \neq D$ și D este între E și O: Din $ABCE$ paralelogram $\Rightarrow \sphericalangle AEC = \sphericalangle ABC \Rightarrow \sphericalangle AEC = \sphericalangle ADC$.

Unghiurile ADO și CDO sunt unghiuri exterioare pentru triunghiurile ADE și $CDE \Rightarrow$

$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADO + \sphericalangle CDO = (\sphericalangle EAD + \sphericalangle AED) + (\sphericalangle CED + \sphericalangle ECD) = \sphericalangle EAD + \sphericalangle AEC +$
$+\sphericalangle ECD = \sphericalangle EAD + \sphericalangle ABC + \sphericalangle ECD > \sphericalangle ABC$.

Este contrazisă ipoteza, deci D nu este situat între E și O.

Cazul 3. Dacă $E \neq D$ și E este între D și O, se demonstrează analog cazului 2.

În concluzie, $ABCD$ este paralelogram în orice situație.

13. $\sphericalangle M + \sphericalangle N = 180°$, deci $MQ \parallel NP$. Dar, $MN \parallel PQ \Rightarrow MNPQ$ este paralelogram.

Propoziția este adevărată.

14. a) $AE = \dfrac{EF}{3} = \dfrac{GH}{3}$. $BG + HB = GH,\ 2 \cdot BG + BG = GH \Rightarrow BG = \dfrac{GH}{3}$;

b) $AE = BG$, $AE \parallel BG$, rezultă că $AEBG$ este paralelogram; **c)** $EFGH$ paralelogram $\Rightarrow FH$ conține mijlocul diagonalei EG. $AEBG$ paralelogram $\Rightarrow AB$ conține mijlocul diagonalei EG și dreptele EG, FH, AB sunt concurente.

15. a) $120°$; **b)** 3 paralelograme: $ABGH$, $ACFH$ și $ADEH$.

16. DM este linie mijlocie în $\Delta EFN \Rightarrow DF \equiv DN$. Deoarece $DM \equiv DP \Rightarrow FMNP$ este paralelogram. Atunci: **a)** $MF \parallel NP$ deci $EF \parallel NP$ și **b)** $MN \equiv PF$.