L1 Dreptunghiul. Proprietăți

Minitest **1.** B; **2.** C; **3.** D.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

2. Fie patrulaterul $ABCD$ cu $\sphericalangle A = \sphericalangle B = \sphericalangle C = 90°$. Atunci $DA \perp AB$, $AB \perp BC$, $BC \perp CD$.
Din $DA \perp AB$, $CB \perp AB \Rightarrow AD \parallel BC$. Din $AB \perp BC$, $DC \perp BC \Rightarrow AB \parallel CD$.
Patrulaterul are laturile opuse paralele și un unghi cu măsura 90°, deci este dreptunghi.

3. În patrulaterul $ABCD$, $\sphericalangle A = \dfrac{\sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D}{3}$ deci $3 \cdot \sphericalangle A = \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D$.
Dar, $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D = 360°$. Ultimele două egalități conduc la $4 \cdot \sphericalangle A = 360°$, de unde $\sphericalangle A = 90°$. La fel se arată că $\sphericalangle B = \sphericalangle C = 90°$. Folosind rezultatul problemei 2, rezultă că $ABCD$ este dreptunghi.

4. $P_{\Delta BOC} = 37{,}2$ cm.

5. **a)** $\sphericalangle MQN = 54°$; $\sphericalangle MPQ = 36°$; **b)** $\sphericalangle MOQ = 128°$; $\sphericalangle MPN = 26°$.

6. **a)** $\sphericalangle MON = \sphericalangle BOM + \sphericalangle BOE = \dfrac{\sphericalangle AOB}{2} + \dfrac{\sphericalangle BOC}{2} = 90°$. $BD \perp DO$, $BE \perp EO \Rightarrow$
$\sphericalangle BDO = \sphericalangle BEO = 90°$ și $BDOE$ are trei unghiuri drepte; **b)** OB, DE sunt diagonale în dreptunghi $\Rightarrow OB \equiv DE$.

7. $ADBE$ este dreptunghi, pentru că diagonalele se înjumătățesc și $\sphericalangle ADB = 90°$. Analog $ADCF$ este dreptunghi $\Rightarrow BCFE$ este dreptunghi.

8. **a)** $BF = CN = 5$ cm, $BF \parallel CN$ și $\sphericalangle FBC = 90°$; **b)** ΔDAF și ΔMBF sunt dreptunghice isoscele și $\sphericalangle AFD = \sphericalangle BFM = 45°$. $\sphericalangle DFM = \sphericalangle AFB - \sphericalangle AFD - \sphericalangle BFM = 90°$; **c)** Fie $PQ \perp CD$, $Q \in CD$. $\Delta MCN \equiv \Delta PQN$ (I.U.)$\Rightarrow PQ = QN = NC = DQ = 5$ cm, deci $\sphericalangle DPM = 90°$.
Patrulaterul $DFMP$ are trei unghiuri drepte, adică este dreptunghi.

9. **a)** $\sphericalangle MON = 60°$; **b)** $MN = 10$ cm.

10. $ACBE$ paralelogram (diagonalele se înjumătățesc) $\Rightarrow AE \parallel BC$, $AE = BC \Rightarrow AE \parallel BD$, $AE = BD \Rightarrow ABDE$ paralelogram. În plus $\sphericalangle ABD = 90°$.

11. $AB = BC = CD = DE = x$, $MC = CN = y$, $AE = 2 \cdot MN \Rightarrow 4x = 2 \cdot 2y \Rightarrow x = y$. În $AMEN$ și $BMDN$ diagonalele se înjumătățesc. În plus $MN = BD = 2 \cdot x$.

12. *AEDF* este paralelogram deoarece laturile opuse sunt paralele.

Cazul I. Dacă *AEDF* este dreptunghi, atunci $\sphericalangle FAE = \sphericalangle BAC = 90°$.

Cazul II. Dacă $\sphericalangle BAC = 90°$, atunci $\sphericalangle FAE = 90°$ și *AEDF* este dreptunghi.

13. Fie P și Q mijloacele razelor OA și $OB \Rightarrow AP = PO = OQ = QB$. Alegem punctele D, F de aceeași parte a dreptei AB. Avem $\Delta COP \equiv \Delta DOP \equiv \Delta EOQ \equiv \Delta FOQ$ (I.C.). Deducem că punctele C, O, F sunt coliniare și punctele D, O, E sunt coliniare $\Rightarrow$ diagonalele DE și CF sunt congruente și se înjumătățesc, deci *CDFE* este dreptunghi.

14. $\sphericalangle ADP = x$, $\sphericalangle APD = 5x$. În ΔADP: $90° + 6x = 180° \Rightarrow x = 15° \Rightarrow \sphericalangle CDP = 75°$.

$CP = AB = CD \Rightarrow \Delta CDP$ isoscel $\Rightarrow \sphericalangle DPC = 75°$, $\sphericalangle DCP = 30°$.

15. a) $\Delta QMR \equiv \Delta SNR$ (C.U.) $\Rightarrow R$ este mijlocul segmentelor MN și QS. $\Delta TMR \equiv \Delta PNR$ (C.U.) $\Rightarrow TM = PN = NS$. $TM \parallel NS$, $\sphericalangle TMN = 90°$, deci *MNST* este dreptunghi.

b) Fie $\{O\} = MP \cap QN$. A este centru de greutate în ΔMNP.

$$AT = TR + RA = PR + RA = \frac{3}{2}\cdot AP + \frac{1}{2}\cdot AP = 2\cdot AP.$$