L3 Pătratul. Proprietăți

Minitest **1.** B; **2.** A; **3.** C.

Exersăm, ne antrenăm, ne dezvoltăm

3. Din ipoteză, $AB \equiv AC$ și $DB \equiv DC$. $\Delta ABC \equiv \Delta DCB$ (I.U.) $\Rightarrow AB \equiv DC$.
Obținem $AB \equiv BD \equiv DC \equiv CA$ și $\sphericalangle A = 90°$, deci $ABDC$ este pătrat.

4. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, respectiv DA ale pătratului $ABCD$. Se folosesc proprietățile liniei mijlocii. $MN = PQ = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{BD}{2} = NP = MP$, $MN \parallel AC$, $MQ \parallel BD$, $AC \perp BD \Rightarrow MN \perp MQ$ și $MNPQ$ este pătrat.

5. Fie M, N, P, Q mijloacele segmentelor AO, BO, CO, respectiv DO. Atunci, $MO = OP$, $NO = OQ$, $MP = MO + OP = \dfrac{AC}{2} = \dfrac{BD}{2} = NO + OQ = NQ$ și $MP \perp NQ$.

6. $\sphericalangle A = \sphericalangle C$, $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180° \Rightarrow \sphericalangle A = \sphericalangle C = 90°$. Rombul cu un unghi drept este pătrat.

7. Fie $\{O\} = AC \cap BD$. $\Delta DOP \equiv \Delta BOP$ (L.L.L.) $\Rightarrow \sphericalangle DOP = \sphericalangle BOP$.
Dar, $\sphericalangle DOP + \sphericalangle BOP = 180° \Rightarrow \sphericalangle DOP = 90°$. Dreptunghiul cu diagonalele perpendiculare este pătrat.

8. Dacă $l = (L + L + l) : 3 \Rightarrow l = L$; Dacă $L = (L + l + l) : 3 \Rightarrow L = l$.

9. **a)** $\sphericalangle EAF = 45°$, $\sphericalangle AFE = \sphericalangle AEF = 67°30'$. **b)** Notăm $\{Q\} = AC \cap EF$. AQ bisectoare și înălțime în ΔAEF isoscel $\Rightarrow AQ \perp FE$. Dar $AQ \perp DB \Rightarrow EF \parallel BD$.

10. **a)** $\Delta AEB \equiv \Delta DFC$ (I.U.) $\Rightarrow EA = EB = FC = FD = x$. $\Delta AMD \equiv \Delta BNC$ (I.U.) $\Rightarrow$ $MA = MD = NB = NC = y$. Laturile patrulaterului $MENF$ au toate lungimea $x + y$ și $\sphericalangle MEN = 90°$.
b) Am demonstrat că $\Delta AEB \equiv \Delta DFC$. Atunci, $\sphericalangle AFE = \sphericalangle AEF$ și $AB \parallel CD$, deci $AE \parallel FC$ și $AE \equiv FC$, adică $AECF$ paralelogram. Rezultă că AC și EF se înjumătățesc.
Analog, $MA \parallel NC$, $MA \equiv NC$, deci $MANC$ paralelogram.
Rezultă că AC și MN se înjumătățesc. În concluzie, AC, MN și EF au același mijloc, iar dreptele lor suport sunt concurente.

11. **a)** $\Delta GAB \equiv \Delta CAE$ (C.C.) $\Rightarrow BG = CE$. **b)** Din $BG \parallel CE \Rightarrow BECG$ este paralelogram și A este mijlocul segmentului BC. $\dfrac{AB}{AC} = 1$.

12. **a)** $\sphericalangle BAF = 45°$, $\sphericalangle BAC = 45°$, iar punctele F și C sunt de aceeași parte a dreptei $AB \Rightarrow A$, F, C coliniare; **b)** $\sphericalangle AEG = \sphericalangle ABD = 45°$ și sunt unghiuri corespondente, formate de dreptele DB și GE cu secanta AB.

13. **a)** $\sphericalangle ABE = \sphericalangle CAF = 45°$ și sunt unghiuri corespondente, formate de dreptele BE și AF cu secanta BC; $BE \parallel AF$ și $AF \perp CE \Rightarrow BE \perp CE$; **b)** ; **b)** Din $BE \perp GC \perp DG$, rezultă $BE \parallel GD$. Dar, $BD \parallel GE$, deci $BEGD$ paralelogram. $GE = DB = EA$. Atunci, $\frac{AB}{AC} = \frac{GE}{GA} = \frac{1}{2}$.

14. În ΔMBQ avem MC bisectoare și înălțime $\Rightarrow \Delta MBQ$ isoscel, cu $MB = MQ$.
Analog $MQ = QA$. Deci $MBAQ$ este romb. Din $AC = BC \Rightarrow AM = BQ$, deci $MBAQ$ este pătrat. Rezultă $\sphericalangle M = 90°$ și $\frac{MN}{NP} = 2$.

15. **b)** $\sphericalangle DEF = 60° + 45° = 105°$. **c)** ΔADE isoscel, $\sphericalangle ADE = 30°$, $\sphericalangle DAE = \sphericalangle DEA = 75° \Rightarrow \sphericalangle AEF = 180°$. **e)** $\sphericalangle ACE = \sphericalangle DCE - \sphericalangle ACD = 15°$, $\sphericalangle BCR = \sphericalangle ACR - \sphericalangle ACB = 15°$, $\sphericalangle ECR = \sphericalangle ECB + \sphericalangle BCR = 45°$. În ΔCEF avem $\sphericalangle FCE = \sphericalangle FCB + \sphericalangle ECB = 90°$, $CE = CF = x$ și $EF = x\sqrt{2}$. În ΔCER avem $\sphericalangle ECR = 45°$, $CE = x$ și $CR = AC = x\sqrt{2}$. $CR = AC = x\sqrt{2}$.
Deci, $\Delta CEF \equiv \Delta ECR$ (L.U.L) $\Rightarrow ER = x$ și $\sphericalangle CER = 90°$.
În aceste condiții, $CERF$ este un paralelogram cu două laturi consecutive congruente și un unghi cu măsura 90°, adică pătrat.